Aburaya, J.H.

Multiplicação e Divisão de cabeça

Tangará da Serra
Jim Heiji Aburaya
2019

Aburaya, J.H.

Multiplicação e Divisão de Cabeça

1.ª Edição

Tangará da Serra
Jim Heiji Aburaya
2019

www.aburaya.com.br

Aburaya, Jim Heiji
Multiplicação e Divisão de Cabeça– Tangará da Serra, 2019.
44p.

Unitermos:
1. Matemática 2. Aritmética

ISBN 978-65-901817-1-8

CDD 510

Aos prodígios: **H**. $\boxed{\textbf{S}}$. **K**.

SUMÁRIO

Prefácio

Este material foi elaborado para se ter um registro de algumas propriedades dos números em aplicações aritméticas, sem o uso de instrumentos eletrônicos (e.g.: calculadoras). Assim, ferramentas mentais estão apresentadas e podem ser utilizadas. Seria interessante, o uso de "papel e lápis", inclusive, seja para a fixação das ferramentas expostas, seja para validar as respostas, seja para organizar os pensamentos.

Esta abordagem se trata de uma Matemática ligada à Aritmética – "fazer contas" (cotidianas, ou "comuns"). Assim, seria válido dizer que, os números, são combinações dos algarismos da nossa base de contagem: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, que representam, numa ordem evolutiva, os números naturais, racionais, inteiros, reais, imaginários, complexos. Aliás, Aritmética tem origem na palavra ἀριθμός ("arithmós" – número).

E, "fazer contas" básicas está associado às quatro operações básicas (da Aritmética): a multiplicação com a ideia básica da adição sucessiva; a divisão com a ideia da subtração em partes iguais. Assim, quando pensamos em duas vezes dois estamos pensando na existência de dois "dois", ou dois mais dois. E, ainda, se pensássemos na divisão, de uma quantidade quatro, em dois ("quatro dividido por dois"); se estivermos pensando em tirar algo de um determinado conjunto, subtração; a adição dispensa apresentação.

A ideia do número natural, como quantidade de coisas, é de fato, o caminho "natural" para a construção da ideia abstrata do número, da sua representação, das suas propriedades. Essas propriedades, codificadas, seja por símbolos, seja por arranjo deles, não estão na abordagem deste texto, mas serão utilizadas. Lembre-se da equivalência do significado para, por exemplo: LOVE, amor, ♥, 愛. Gostaria que lembrasse também, por exemplo, que o mesmo vale para: "por cento", "dividido por cem", %, 1/100, 100^{-1}, 10^{-2}, 0,01...

Assim, peço que retire as amarras do significante, para libertar os significados, de como os números podem ser lidos, de como podem ser "traduzidos". Por exemplo, o número sete pode ser "lido" como "pode ser a soma de três mais quatro”, “pode ser a raiz quadrada de 49”, “pode ser 14 dividido em dois”, “21 dividido por três”...

A “tabuada” está exposta, além de algumas formulações para a sua memorização. Ainda, artifícios (objetivo deste trabalho) de possibilidades de efetuar as operações de multiplicação e divisão de quaisquer números naturais pelos algarismos, que é base para qualquer outra operação matemática (inclusive soma e subtração).

Divirta-se.

Editor

1 TABUADA

1	$\times 1 =$	1	2	$\times 1 =$	2	3	$\times 1 =$	3
1	$\times 2 =$	2	2	$\times 2 =$	4	3	$\times 2 =$	6
1	$\times 3 =$	3	2	$\times 3 =$	6	3	$\times 3 =$	9
1	$\times 4 =$	4	2	$\times 4 =$	8	3	$\times 4 =$	12
1	$\times 5 =$	5	2	$\times 5 =$	10	3	$\times 5 =$	15
1	$\times 6 =$	6	2	$\times 6 =$	12	3	$\times 6 =$	18
1	$\times 7 =$	7	2	$\times 7 =$	14	3	$\times 7 =$	21
1	$\times 8 =$	8	2	$\times 8 =$	16	3	$\times 8 =$	24
1	$\times 9 =$	9	2	$\times 9 =$	18	3	$\times 9 =$	27
4	$\times 1 =$	4	5	$\times 1 =$	5	6	$\times 1 =$	6
4	$\times 2 =$	8	5	$\times 2 =$	10	6	$\times 2 =$	12
4	$\times 3 =$	12	5	$\times 3 =$	15	6	$\times 3 =$	18
4	$\times 4 =$	16	5	$\times 4 =$	20	6	$\times 4 =$	24
4	$\times 5 =$	20	5	$\times 5 =$	25	6	$\times 5 =$	30
4	$\times 6 =$	24	5	$\times 6 =$	30	6	$\times 6 =$	36
4	$\times 7 =$	28	5	$\times 7 =$	35	6	$\times 7 =$	42
4	$\times 8 =$	32	5	$\times 8 =$	40	6	$\times 8 =$	48
4	$\times 9 =$	36	5	$\times 9 =$	45	6	$\times 9 =$	54
7	$\times 1 =$	7	8	$\times 1 =$	8	9	$\times 1 =$	9
7	$\times 2 =$	14	8	$\times 2 =$	16	9	$\times 2 =$	18
7	$\times 3 =$	21	8	$\times 3 =$	24	9	$\times 3 =$	27
7	$\times 4 =$	28	8	$\times 4 =$	32	9	$\times 4 =$	36
7	$\times 5 =$	35	8	$\times 5 =$	40	9	$\times 5 =$	45
7	$\times 6 =$	42	8	$\times 6 =$	48	9	$\times 6 =$	54
7	$\times 7 =$	49	8	$\times 7 =$	56	9	$\times 7 =$	63
7	$\times 8 =$	56	8	$\times 8 =$	64	9	$\times 8 =$	72
7	$\times 9 =$	63	8	$\times 9 =$	72	9	$\times 9 =$	81

Lembre-se:

- Todo número multiplicado por um número par será sempre par;
- Então, o produto de dois números ímpares é sempre ímpar;
- Os números 1, 3, 5, 7 são os números primos na Tabuada.

2 MULTIPLICAÇÃO POR DOIS

A chave (e não, um segredo) para a multiplicação por dois seria memorizar os dobros dos algarismos primitivos, que seria a "Tabuada do Dois":

Operação	***Resultado***
2×1	2
2×2	4
2×3	6
2×4	8
2×5	10
2×6	12
2×7	14
2×8	16
2×9	18

Percebe-se que esses dobros são terminados pelos algarismos: ou 0, ou 2, ou 4, ou 6, ou 8. Sempre! E, é assim, que se caracterizam os números pares.

Lembrando que um número pode ser decomposto em suas potências de dez (unidades, dezenas, centenas, milhares...), pode-se exemplificar: Qual é o dobro de 5423? A resposta pode ser obtida, em detalhes:

$$5423 \times 2 =$$
$$(5000 + 400 + 20 + 3) \times 2 =$$
$$(5 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \times 1) \times 2 =$$

E, com a "propriedade distributiva" da multiplicação:

$$\mathbf{5 \times 2} \times 1000 + \mathbf{4 \times 2} \times 100 + \mathbf{2 \times 2} \times 10 + \mathbf{3 \times 2} =$$
$$\mathbf{10} \times 1000 + \mathbf{8} \times 100 + \mathbf{4} \times 10 + \mathbf{6} =$$
$$10000 + 800 + 40 + 6 =$$
$$10846$$

$$\begin{array}{r} 10000 \\ +800 \\ +40 \\ +6 \\ \hline 10846 \end{array}$$

Você poderia responder a pergunta "Qual é o dobro do número cinco mil, quatrocentos e, vinte e três" como: "O dobro de cinco mil, mais o dobro de quatrocentos, mais o dobro de vinte, mais o dobro de três". Assim, o exercício seria somar: dez mil, mais oitocentos, mais quarenta, mais seis. Ou literalmente: dez mil, oitocentos e, quarenta e seis...

E 88×2? Resposta:

$$(8 \times 10 + 8) \times 2 = \mathbf{8 \times 2} \times 10 + \mathbf{8 \times 2} = \mathbf{16} \times 10 + \mathbf{16} =$$
$$160 + 16 =$$
$$176$$

3 MULTIPLICAÇÃO POR TRÊS

Ainda, para a multiplicação por três, a memorização dos triplos dos algarismos primitivos é bem-vinda (Tabuada – p.9).

Em termos de decomposição na base dez (potências de dez), o mecanismo se repete como colocado no capítulo anterior. Deste modo, um exemplo: Qual o triplo de 872? Sem utilizar uma expressão numérica (explicitamente), podemos mentalmente dizer que seria algo como:

- O triplo de oitocentos, ou seja, dois mil e quatrocentos;
- Mais o triplo de setenta, ou seja, duzentos e dez;
- Mais o triplo de dois, ou seja, seis.

Utilizando-se o algoritmo de Euclides para a soma:

- Seis + dez = dezesseis;
- Dezesseis + duzentos = duzentos e dezesseis;
- Duzentos e dezesseis + quatrocentos = seiscentos e dezesseis;
- Mais dois mil = dois mil, seiscentos e dezesseis.

Ou seja:

$$
\begin{gathered}
872 \times 3 = \\
800 \times 3 + 70 \times 3 + 2 \times 3 = \\
2400 + 210 + 6 = \\
2616
\end{gathered}
$$

4 MULTIPLICAÇÃO POR QUATRO

Sabemos que o número quatro pode ser obtido pela multiplicação do número dois por ele mesmo ($4 = 2 \times 2$). Assim, a multiplicação por quatro, nada mais, seria realizar a Multiplicação por DOIS (p.10), duas vezes:

$$423 \times 4 = 423 \times (2 \times 2) = (423 \times 2) \times 2 =$$
$$(800 + 40 + 6) \times 2 =$$
$$1600 + 80 + 12 =$$
$$1600 + 92 =$$
$$1692$$

5 MULTIPLICAÇÃO POR CINCO

Com o mesmo mecanismo da Multiplicação por QUATRO, a multiplicação por cinco pode ser feita considerando o número cinco como: ou a soma de 2 + 3, ou como a divisão de dez por dois (10 / 2). Das duas formas, o resultado de 322 × 5:

$322 \times 5 =$	$322 \times 5 =$
$322 \times (\mathbf{3 + 2}) =$	$322 \times (\mathbf{10 / 2}) =$
$(322 \times 3) + (322 \times 2) =$	$(322 \times 10) / 2 =$
$(900 + 60 + 6) + (600 + 40 + 4) =$	$3220 / 2 =$ [i]
$(900 + 600) + (60 + 40) + (6 + 4) =$	$3000 + 200 + 20 =$
$1500 + 100 + 10 =$	$1500 + 100 + 10 =$
1610	1610

[i] Mais exemplos da Divisão por DOIS na página 12.

6 MULTIPLICAÇÃO POR SEIS

Se a leitura deste texto foi linear, o mecanismo de “fazer conta” já deve ter sido incorporado. Ou seja, o “truque”, para a multiplicação por seis, seria pensar o número seis como sendo, por exemplo: $3 + 3$, ou 2×3, ou 3×2, ou $2 + 4$, ou 6 (mesmo)... Daí, 1214×6:

$1214 \times 6 =$
$1214 \times (\mathbf{3 + 3}) =$
$(1214 \times 3) + (1214 \times 3) \rightarrow$

$1214 \times 3 =$
$3000 + 600 + 30 + 12 =$
$3000 + 600 + 42 =$
$3000 + 642 =$
3642

$\rightarrow 3642 + 3642 =$
$3642 \times 2 =$
$6000 + 1200 + 80 + 4 =$
$6000 + 1200 + 84 =$
$6000 + 1284 =$
7284

$1214 \times 6 =$
$1214 \times (\mathbf{2 \times 3}) =$
$(1214 \times 2) \times 3 =$
$(2000 + 400 + 20 + 8) \times 3 =$
$6000 + 1200 + 60 + 24 =$
$6000 + 1200 + 84 =$
$6000 + 1284 =$
7284

$1214 \times 6 =$
$1214 \times (\mathbf{3 \times 2}) =$
$(1214 \times 3) \times 2 =$
$(3000 + 600 + 30 + 12) \times 2 =$
$6000 + 1200 + 60 + 24 =$
$6000 + 1200 + 84 =$
$6000 + 1284 =$
7284

$1214 \times 6 =$
$1214 \times (\mathbf{2 + 4}) =$
$(1214 \times 2) + (1214 \times 4) =$
$(1214 \times 2) + (1214 \times (2 + 2)) =$
$1214 \times 2 + 1214 \times 2 + 1214 \times 2 =$
$2428 + 2428 + 2428 =$
$2428 \times 3 =$
$6000 + 1200 + 60 + 24 =$
$6000 + 1200 + 84 =$
$6000 + 1284 =$
7284

Como:

$6 \times 1 = 6$
$6 \times 2 = 12$
$6 \times 4 = 24$
$6 \times 10 = 60$

$1214 \times \mathbf{6} =$
$6000 + 1200 + 60 + 24 =$
$6000 + 1200 + 84 =$
$6000 + 1284 =$
7284

6.1 Números pares multiplicados por Seis

Há uma “matemágica” para a multiplicação de um número par pelo número seis: ele sempre termina com o mesmo algarismo deste número par: o resultado de 22 × 6 deve terminar em [2], o resultado de 38 × 6 deve terminar em [8]... Veja o comportamento:

0	× 6 =	**0**	1**0**	× 6 =	6**0**	2**0**	× 6 =	12**0**
2	× 6 =	1**2**	1**2**	× 6 =	7**2**	2**2**	× 6 =	13**2**
4	× 6 =	2**4**	1**4**	× 6 =	8**4**	2**4**	× 6 =	14**4**
6	× 6 =	3**6**	1**6**	× 6 =	9**6**	2**6**	× 6 =	15**6**
8	× 6 =	4**8**	1**8**	× 6 =	10**8**	2**8**	× 6 =	16**8**

E como determinar a outra “parte” do número? A resposta é o resultado da soma entre: o resultado da multiplicação por seis do número formado pelos algarismos “faltantes” (AF), a esquerda; com a metade do valor do algarismo da direita:

$$6 \times AF + AD / 2$$

Os exemplos a seguir ilustram esse mecanismo:

8 × 6 :

- O resultado termina em [**8**];
- E começa com:

6 × 0 + 8 / 2 =
0 + 4 =
4

Então, o resultado é:
[4][8]:
48

12 × 6 :

- O resultado termina em [**2**];
- E começa com:

6 × 1 + 2 / 2
6 + 1 =
7

Então, o resultado é:
[7][2]:
72

114 × 6 :

- O resultado termina em [**4**];
- E começa com:

6 × 11 + 4 / 2 =
66 + 2 =
68

Então, o resultado é:
[68][4]:
684

7 MULTIPLICAÇÃO POR SETE

Como o número sete é um número primo, sua decomposição em algum produto de dois outros números não existe. Mas, podemos continuar como, por exemplo, escrevê-lo como: $4 + 3$, ou ainda, $2 + 2 + 3$, $14 / 2$. Escrevê-lo como $4 + 3$ torna a multiplicação por sete uma soma de produtos da multiplicação por dois e por três. Exemplo:

$$587 \times 7 =$$
$$587 \times (2 + 2 + 3) =$$
$$(587 \times 2) + (587 \times 2) + (587 \times 3) =$$
$$(1000 + 160 + 14) + (1000 + 160 + 14) + (1500 + 240 + 21) =$$
$$(2000 + 320 + 28) + (1500 + 240 + 21) =$$
$$(2000 + 300 + 20 + 20 + 8) + (1000 +500 + 200 + 40 + 20 + 1) =$$
$$(2000 + 1000) + (300 + 500 + 200) + (20 + 20 + 40 + 20) + (8 + 1) =$$
$$3000 + 1000 + 100 + 9 =$$
$$4000 + 100 + 9 =$$
$$4000 + 109 =$$
$$4109$$

8 MULTIPLICAÇÃO POR OITO

Entenda, pelo exemplo, a possibilidade de $8 = 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2$:

$$687 \times 8 =$$
$$687 \times (2 \times 4) =$$
$$687 \times (2 \times 2 \times 2) =$$
$$((687 \times 2) \times 2) \times 2 =$$
$$((1200 + 160 + 14) \times 2) \times 2 =$$
$$(2400 + 320 + 28) \times 2 =$$
$$4800 + 640 + 56 =$$
$$4000 + 800 + 600 + 40 + 56 =$$
$$4000 + 1400 + 96 =$$
$$4000 + 1496 =$$
$$5496$$

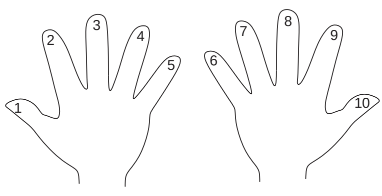
9 MULTIPLICAÇÃO POR NOVE

A utilização da correspondência entre o número nove e (10 – 1) parece um caminho favorável para os resultados desta operação, já que, multiplicar por dez, seria apenas elevar a potência do número (colocar um zero à direita[ii]). Assim, por exemplo:

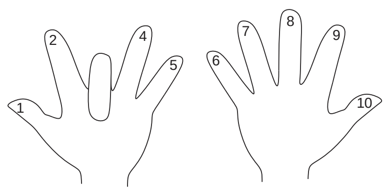
$$\mathbf{758 \times 9} =$$
$$758 \times (10 - 1) =$$
$$(758 \times 10) - (758 \times 1) =$$
$$\mathbf{7580 - 758} =$$
$$(7000 + 500 + 80) - (700 + 50 + 8) =$$
$$7000 + 500 + 80 - 700 - 50 - 8 =$$
$$7000 - 700 + 500 - 50 + 80 - 8 =$$
$$6300 + 450 + 72 =$$
$$6000 + 300 + 400 + 50 + 70 + 2 =$$
$$6000 + 700 + 120 + 2 =$$
$$6000 + 700 + 122 =$$
$$6000 + 822=$$
$$6822$$

9.1 Tabuada do Nove nos dedos

Os resultados da "Tabuada do Nove" podem ser "observados" nos dedos. Por exemplo, **3** × 9:

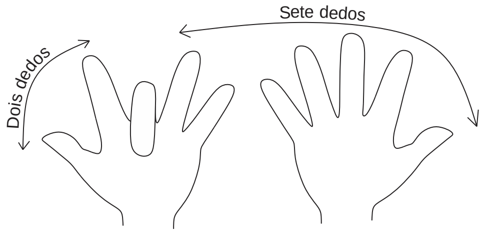


1. Enumere seus dedos



2. Escolha o dedo correspondente. Neste caso: 3

[ii] Ou ainda, deslocar o ponto decimal (vírgula) para a direita (ex. p.15)



3. O resultado está em seus dedos: dois dedos à esquerda [2] e outros sete dedos à direita [7]:

$3 \times 9 =$

[2][7]: 27

10 DIVISÃO POR DOIS

A operação de divisão é a inversa da multiplicação. Assim, lembrando o processo de Multiplicação por DOIS, podemos elaborar um possível plano de ação. Antes, lembre-se que a divisão por dois, sem resto, exato, só acontece com os números pares. Ou seja, aqueles que são terminados com os algarismos 0, 2, 4, 6 e 8. Nos demais números, há uma fração que "sobra", mas que pode ser representada de maneira racional ou em notação decimal, e os artifícios mostrados podem ser utilizados.

Vamos, a um exemplo:

$$6874 / 2 =$$
$$(6000 + 800 + 70 + 4) / 2 =$$
$$(6000 / 2) + (800 / 2) + (70 / 2) + (4 / 2) =$$
$$3000 + 400 + 35 + 2 =$$
$$3000 + 400 + 37 =$$
$$3437$$

11 DIVISÃO POR TRÊS

Na Divisão por DOIS, precisávamos determinar se um número era divisível por ele (par), para que o resultado fosse exato. Na divisão por três, pode-se explorar o resto da divisão por nove (p.28). Assim, um número é divisível por três (exatamente – sem resto), se a soma reduzida dos algarismos que compõe esse número também o é, ou seja, ou 3, ou 6, ou 9 (múltiplo de três). Por exemplo: 8721 é divisível por três?

(8721)*:	$\rightarrow$ (18)*:
8 + 7 + 2 + 1 =	1 + 8 =
8 + 7 + 3 =	9
8 + 10 =	
18 $\rightarrow$	

A resposta é SIM, porque 9 é múltiplo de três. Desde modo:

$$
\begin{gathered}
8721 / 3 = \\
(8000 + 700 + 21) / 3 = \\
(8100 + 600 + 21) / 3 = \\
((81 \times 100) + (6 \times 100) + 21) / 3 = \\
(81 / 3) \times 100 + (6 / 3) \times 100 + 21 / 3= \\
((9 \times 9) / 3) \times 100 + 2 \times 100 + 7 = \\
(9 / 3) \times 9 \times 100 + 200 + 7 = \\
3 \times 9 \times 100 + 207 = \\
27 \times 100 + 207 = \\
2700 + 207 = \\
2907
\end{gathered}
$$

A avaliação do número, de ser múltiplo de três, através da soma reduzida dos algarismos que o compõe, traz, por exemplo, que, números que são compostos com trincas de mesmo algarismo podem ser avaliados como, sempre, divisíveis por três: 222, 666, 555444, 888777111...

11.1 Que tal 37?

Aproveitando a apresentação da trinca, a divisão deste número dela pela soma dos valores dos algarismos que a compõe, sempre possui o resultado 37:

(222)*:	(888)*:
2 + 2 + 2 =6	8 + 8 + 8 = 24
222 / 6 = **37**	888 / 24 = **37**

12 DIVISÃO POR QUATRO

Um número pode ser dividido por quatro, sem resto da divisão, se ele puder ser dividido por dois, duas vezes. Só é possível se ele for: par e; após a primeira divisão por dois, ele continue a ser par. Assim, podem ser avaliadas as suas potências, porque elas também devem obedecer a esse critério. A única potência importante é a das dezenas, porque qualquer número de potência superior às dezenas é divisível por quatro (100, 200 ... 1000, 2000...) Por exemplo, 8972 é múltiplo de quatro?.

$$
\begin{gathered}
(8972) : \\
72 = \\
60 + 12 = \\
40 + 20 + 12
\end{gathered}
$$

A resposta é SIM, porque 72 (a “dezena” do número) é uma combinação de múltiplos de quatro (40, 20 e 12, que podem ser vistas estão na “Tabuada do Quatro”, p.9). Desde modo:

$$
\begin{gathered}
8972 / 4 = \\
(8972 / 2) / 2 = \\
((8000 + 900 + 70 + 2) / 2) /2 = \\
(4000 + 450 + 35 + 1) / 2 = \\
(4000 + 400 + 50 + 30 + 5 + 1) / 2 = \\
(4000 + 400 + 80 + 6) / 2 = \\
2000 + 200 + 40 + 3 = \\
2000 + 200 + 43 = \\
2000 + 243 = \\
2243
\end{gathered}
$$

13 DIVISÃO POR CINCO

Observando a “Tabuada do Cinco” (p.9), os múltiplos de cinco terminam sempre com os algarismos 0 ou 5. Lembrando que podemos representar o número cinco como 10 / 2, a divisão por cinco, pode ser obtida com “o dobro do número dividido por dez” (a divisão é o processo inverso da multiplicação). Assim, por exemplo, o resultado de 8735 dividido por cinco:

$$8735 / 5 =$$
$$8735 \mathbf{/} (\mathbf{10} / \mathbf{2}) =$$
$$8735 \boldsymbol{\times}(\mathbf{2 / 10}) =$$
$$(8735 \times 2) / 10 =$$
$$(8000 + 700 + 35) \times 2 / 10 =$$
$$(16000 + 1400 + 70) / 10 =$$
$$(16000 + 1470) /10 =$$
$$17470 / 10 =$$
$$1747$$

14 DIVISÃO POR SEIS

A divisão por seis, também pode ser realizada com a operação sucessiva de uma divisão por dois (p.20) e uma divisão por três (p.21). Então, deve ser um número par e, a soma reduzida dos seus algarismos, um múltiplo de três. Um exemplo, 3504 é múltiplo de seis? Ou seja, a divisão não tem resto? Avaliando os critérios: seria par e múltiplo de três?

(3504)*: 3 + 5 + 4 = 3 +9 = 12→	→(12)*: 1 + 2 = 3

A resposta é SIM, porque 3 é múltiplo de três. Desde modo:

$$3504 / 6 =$$
$$3504 / (2 \times 3) =$$
$$(3504 / 2) / 3 =$$
$$((3000 + 500 + 4) / 2) / 3 =$$
$$(1500 + 250 + 2) / 3 =$$
$$(1500 + 240 + 10 + 2) / 3 =$$
$$(1500 + 240 + 12) / 3 =$$
$$500 + 80 + 4 =$$
$$584$$

15 DIVISÃO POR SETE

Os números que são múltiplos de sete, por se tratar de um número primo, não são óbvios. Uma forma de avaliar se o número se trata de um múltiplo de sete (i.e., divisível por ele, sem resto) é avaliar se a "distância" (módulo da diferença) entre o dobro do algarismo menos significativo (da direita) e o número que se forma com os demais algarismos é um múltiplo de sete. Esta avaliação pode ser recorrente, como exemplificado a seguir:

861 é divisível por sete?

(861):
(86) e (1)
86 – (2 × 1) =
86 – 2 =
84

A resposta depende, agora, se 84 é múltiplo de sete. Então, 84 é divisível por sete?

(84):
(8) e (4)
8 – (2 × 4) =
8 – 8 =
0

A resposta é SIM, porque zero é múltiplo de sete.

Daí, a divisão se torna mais observável se decompormos o dividendo em "potências de sete": 700, 140, 21...

861 / 7 =
700 + 161 =
(700 + 140 + 21) / 7 =
700 / 7 + 140 / 7 + 21 / 7 =
100 + 20 + 3 =
100 + 23 =
123

16 DIVISÃO POR OITO

Dividir por oito seria dividir por dois (p.20), três vezes, já que $8 = 2 \times 2 \times 2$. Por exemplo, 2832 / 8:

$$\begin{gathered}2832 / 8 = \\ 2832 / (2 \times 2 \times 2) = \\ ((2832 / 2) / 2) / 2 = \\ (1416 / 2) / 2 = \\ 708 / 2 = \\ 354\end{gathered}$$

17 DIVISÃO POR NOVE

Como o nove pode ser pensado no produto 3×3, o número que será divido por nove, sem apresentar resto da divisão, deve ser, obrigatoriamente, divisível por três, duas vezes. Assim, se a soma reduzida dos algarismos que compõe esse número também o é (i.e., 9), então ele é múltiplo de nove. Por exemplo: 2832 é divisível por nove?

(2826)*: 2 + 8 + 2 + 6 = 18 →	→ (18)*: 1 + 8 = 9

A resposta é SIM, porque 18 é múltiplo de nove (o número 9 que é soma reduzida dos algarismos, também). Desde modo:

$$
\begin{gathered}
2826 / 9 = \\
2826 / (3 \times 3) = \\
(2826 / 3) / 3 = \\
((2700 + 126) / 3) / 3 = \\
((2700 + 90 + 30 + 6) / 3) / 3 = \\
(900 + 30 + 10 + 2) / 3 = \\
(900 + 30 + 12) / 3 = \\
300 + 10 + 4 = \\
314
\end{gathered}
$$

18 PROVA DOS RESTOS (PROVA DOS NOVE)

Da operacionalidade da avaliação da possibilidade de um número ser múltiplo de nove, pode-se pressupor que qualquer valor diferente de nove, seria o resto da divisão desse número por nove.

Então, as operações, numa “base nove”, podem ser traduzidas pelos comportamentos dos seus restos, ou seja, das somas reduzidas dos algarismos que compõe os números envolvidos na operação. Por exemplo, se a pergunta fosse 58×6 resulta em 348?

Uma possível solução depende das somas reduzidas dos algarismos que compõem os números envolvidos na operação. E são:

$$(58)^*:$$
$$5 + 8 = 13 \rightarrow 1 + 3 =$$
$$\mathbf{4}$$
$$(6)^*:$$
$$\mathbf{6}$$
$$(378)^*:$$
$$3 + 7 + 8 = 18 \rightarrow 1 + 8 =$$
$$\mathbf{9}$$

Se, $58 \times 6 = 348$, então 4×6 deve ter um resultado, cuja soma reduzida dos algarismos que o compõe seja 9, ou seja, $(58)^* \times (6)^* \rightarrow (378)^*$. Realizando a operação:

$$4 \times 6 = 36$$

$$(36)^*:$$
$$3 + 6 =$$
$$\mathbf{9}$$

A validade da expressão $58 \times 6 = 348$ pode ser estabelecida, já que os restos da divisão por nove (por essa “mudança de base”) também o é, ou seja, $(58)^* \times (6)^*$ leva ao resultado esperado para $(378)^*$.

18.1 Por que a expressão "Noves, fora!"?

Tirar todos os "noves" que existem dentro de um número é dividir esse número por nove. Neste caso, o importante não seria quantos noves podem ser "tirados", mas a resposta da ordem: "Noves, fora!"

10, "Noves, fora!": 1

15, "Noves fora!": 6

Neste exemplo, qualquer operação, por exemplo, entre os números 10 e 15, deve "respeitar" a mesma operação com seus "restos" (ou seja, com os números 1 e 6). Observe:

10 + 15 = **25**
(10)* + (15)* → (25)*

(25)*: 2 + 5 = 7
25, "Noves, fora!": 16
16, "Noves, fora!": **7**

1 + 6 = **7**
↓
[1] + [6] → [7]

---

15 – 10 = **5**
(15)* – (10)* → (5)*

6 – 1 = **5**
↓
[6] – [1] → [5]

---

10 × 15 = **150**
(10)* × (15)* → (150)*

(150)*: 1 + 5 + 0 = 6
1 × 6 = 6
↓
[1] × [6] → ´[6]

---

140 / 35 = **4**
(140)* / (35)* → (4)*

(140)*: 1 + 4 + 0 = 5
14, "Noves, fora!": 5

(35)*: 3 + 5 = 8
35, "Noves, fora!": 26
26, "Noves, fora!": 17
17, "Noves, fora!": 8

(140)* / (35)*:
5000 / 8 = 625
(625)*: 6 + 2 + 5 = 13 →
(13)*: 1 + 3 = **4**
ou
5 / 8 = 0,625
(0,625)*: 6 + 2 + 5 = 13
(13)*: 1 + 3 = **4**
↓
[5] / [8] → [4]

19 OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS

A menos dos números irracionais (e.g.: $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, π...), os números podem ser escritos em sua forma racional (razão entre números), como:

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} \qquad 5 = \frac{10}{2},\ \frac{100}{20} \qquad 1 = \frac{2}{2},\frac{3}{3} \qquad 10 = \frac{60}{6},\frac{100}{10}$$

Com isso em mente, as multiplicações com números racionais, seja na sua forma decimal, sejam na sua forma fracionária, são operações com números inteiros. Assim, as colocações, já apresentadas, podem ser úteis, bastando à devida manipulação. Por exemplo, há a equivalência entre:

$$5\ /\ 8 \left(\frac{5}{8}\right) = 0{,}625 = 62{,}5\% \left(\frac{62{,}5}{100}\right) = 625‰ \left(\frac{625}{1000}\right)$$

O valor de 5 / 8 foi utilizado no capítulo anterior (determinação de uma das somas reduzidas dos algarismos que compõe um número), para isso, pode-se propor um caminho, com sucessivas multiplicações por um (10 / 10) = 1 e seguidas simplificações:

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{8} \times \frac{10}{10} = \frac{50}{80} = \frac{25}{40} = \frac{25}{40} \times \frac{10}{10} = \frac{250}{400} = \frac{125}{200} = \frac{125}{200} \times \frac{10}{10} = \frac{1250}{2000} =$$

$$1250\ /\ 2000 =$$
$$1250\ /\ (2 \times 1000) =$$
$$(1250\ /\ 2)\ /1000 =$$
$$((1000 + 200 + 50)\ /\ 2)\ /\ 1000 =$$
$$(500 + 100 + 25)\ /\ 1000 =$$
$$625\ /\ 1000 =$$
$$0{,}625$$

Lembre-se: um número inteiro dividido por 1000 tem sua resposta com três casas decimais; divido por 100, duas; por 10000, quatro...

19.1 Divisão por Sete[iii]

Qualquer número, a menos de seus múltiplos, dividido por sete, tem seu resultado com uma dízima periódica, e periodicidade conhecida de alguns algarismos. A sequência dessa dízima (periódica) é uma sequência cíclica dos algarismos 1 4 2 8 5 7: para $1/7$, **1**42857; para $2/7$, 2857**1**4; para $3/7$, 42857**1**...

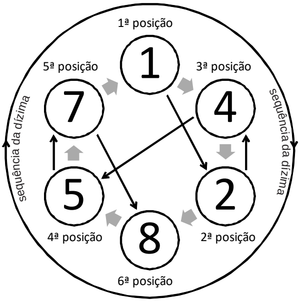
O "comportamento" desta operação pode-se observado:

		Início da Dízima		
Operação	**Múltiplo**	**Posição**	**Algarismo**	**Resultado**
$\underline{1}/7$	**0**	$\underline{1} - \mathbf{0} \rightarrow \cancel{1}^{a}$	1	$0,\overline{142857}$
$\underline{2}/7$	**0**	$\underline{2} - \mathbf{0} \rightarrow \cancel{2}^{a}$	2	$0,\overline{285714}$
$\underline{3}/7$	**0**	$\underline{3} - \mathbf{0} \rightarrow \cancel{3}^{a}$	4	$0,\overline{428571}$
$\underline{4}/7$	**0**	$\underline{4} - \mathbf{0} \rightarrow \cancel{4}^{a}$	5	$0,\overline{571428}$
$\underline{5}/7$	**0**	$\underline{5} - \mathbf{0} \rightarrow \cancel{5}^{a}$	7	$0,\overline{714285}$
$\underline{6}/7$	**0**	$\underline{6} - \mathbf{0} \rightarrow \cancel{6}^{a}$	8	$0,\overline{857142}$
$7/7$	7	-	-	1
$\underline{8}/7$	**7**	$\underline{8} - \mathbf{7} \rightarrow \cancel{1}^{a}$	1	$1,\overline{142857}$
$\underline{9}/7$	**7**	$\underline{9} - \mathbf{7} \rightarrow \cancel{2}^{a}$	2	$1,\overline{285714}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underline{13}/7$	**7**	$\underline{13} - \mathbf{7} \rightarrow \cancel{6}^{a}$	8	$1,\overline{857142}$
$14/7$	14	-	-	2
$\underline{15}/7$	**14**	$\underline{15} - \mathbf{14} \rightarrow \cancel{1}^{a}$	1	$2,\overline{142857}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Lembrando que a parte inteira é um número múltiplo de sete, só precisamos do "resto" da divisão para o resultado, temos, por exemplo, para:

$$19/7 = (14+5)/7 = 14/7 + 5/7 = 2 + 0,\overline{714285} = 2,\overline{714285}$$

[iii] Inspirado pelo amigo Thiago Gasparino.



Assim, se a sequência 1 4 2 8 5 7 estiver memorizada, bem como a associação do algarismo inicial da dízima (1, 2, 4, 5, 7, 8) para cada resto da operação, as divisões por sete, mentalmente, trazem a resposta precisa.

20 VALOR APROXIMADO DA RAIZ QUADRADA

O objetivo de todos os exemplos colocados foi de proporcionar realizar contas (Aritmética), com observações de representação dos números e das operações básicas. Contudo, aproveito para demonstrar uma aproximação do valor da raiz quadrada de um número, por se tratar de algo simples que pode ser útil para determiná-la (aproximação pela Álgebra).

Apenas como demonstração da solução exata, e apresentação de uma possibilidade de representação da raiz quadrada pela Álgebra, a demonstração a seguir, traz uma boa aproximação para a determinação da raiz quadrada de um número:

$\sqrt{m} = n + \varepsilon$	A raiz quadrada de um número qualquer "m" pode ser representado com sendo um número inteiro "n" e um resto "ε".
$\left(\sqrt{m} = n + \varepsilon\right)^2 \rightarrow m = \left(n + \varepsilon\right)^2$	Elevação da equação ao quadrado (à potência dois).
$m = n^2 + 2 \times n \times \varepsilon + \varepsilon^2$	Solução do quadrado de um binômio.
$\varepsilon = \dfrac{m - n^2 - \varepsilon^2}{2n}$	O resto "ε", sem se preocupar com o termo de segunda ordem "ε²".
$\sqrt{m} = n + \dfrac{m - n^2 - \varepsilon^2}{2n}$ $\sqrt{m} = \dfrac{2n^2 + m - n^2 - \varepsilon^2}{2n}$ $\sqrt{m} = \dfrac{n^2 + m - \varepsilon^2}{2n}$ $\sqrt{m} = \dfrac{m + n^2}{2n} - \dfrac{\varepsilon^2}{2n}$	Substituição na equação inicial.

Desconsiderando o termo de segunda ordem $\frac{\varepsilon^2}{2n}$, temos:

$$\sqrt{m} \sim (m + n^2) / (2 \times n)$$

onde “n” é a raiz quadrada do número, menor, e mais próxima de $\sqrt{m}$.

Lembrando os quadrados dos primeiros números naturais (raízes quadradas conhecidas):

$$1 \times 1 = 1, \text{ ou seja, } \sqrt{1} = 1;$$
$$2 \times 2 = 4\ (\sqrt{4} = 2)$$
$$3 \times 3 = 9\ (\sqrt{9} = 3)$$
$$4 \times 4 = 16\ (\sqrt{16} = 4)$$

pode-se determinar a raiz quadrada de dez. A $\sqrt{10}$, que está entre $\sqrt{9}$ e $\sqrt{16}$, que correspondem ao quadrado de 3 e 4 (valores de “n”), pode ser avaliada escolhendo-se, então, n = 3 (para m = 10):

$$\sqrt{10} \sim (10 + 3^2) / (2 \times 3) =$$
$$(10 + 9) / 6 =$$
$$19 / 6 =$$
$$(18 + 1) / 6 =$$
$$3 + 1 / 6 =$$
$$3 + 0{,}1\overline{66} =$$
$$3{,}1\overline{66}$$

$$\sqrt{10} \sim 3{,}\ 17$$

O valor de $\sqrt{10}$ é “aproximadamente” igual a 3,1622776602... Como curiosidade, nesta aproximação, o termo desconsiderado foi de aproximadamente 0,14% do valor mais preciso da raiz quadrada de dez, ou seja, 1,4 milésimos de erro.

21 JOGO DOS QUATRO QUATROS E QUATRO OPERAÇÕES

O estabelecimento de um caminho para desenvolver o raciocínio lógico, a criação (imaginação) de possíveis caminhos para soluções de problemas matemáticos (e aqueles que podem ser apresentados no cotidiano), ou ainda, apenas a avaliação de possibilidades na resolução de problemas matemáticos, inspira o jogo dos quatro 4 e quatro operações (soma +, subtração –, multiplicação × e divisão /). O objetivo seria formar todos os números possíveis de serem representados por quatro números 4 (obrigatoriamente) e pelas quatro operações básicas, ou seja, dentre várias possibilidades, uma delas:

#	**quatro 4's**	#	**quatro 4's**
0	$4 + 4 - 4 - 4$	16	$4 \times 4 \times 4 / 4$
1	$44 / 44$	43	$44 - 4 / 4$
2	$4 / 4 + 4 / 4$	60	$(4 \times 4 \times 4) - 4$
3	$(4 + 4 + 4) / 4$	1936	44×44
4	$4 + (4 - 4) / 4$	⋮	

Outro caminho seria utilizar outros artifícios de representação numérica: potenciação, radiciação, fatorial... Mas, sempre com os quatro 4's:

#	**quatro 4's**	#	**quatro 4's**
5	$4^{4-4} + 4$	6	$4! (4 \times 4 / 4$
8	$4^{4/4} + 4$	16×	$\sqrt{4 \times 4 \times 4 \times 4}$

Com apenas três números 5 (obrigatoriamente) pode "dificultar" a representação dos variados números. Mas, muito instigante à percepção imaginativa.

22 “CURIOSIDADES”

As colocações, como na seção anterior, estão para “brincar”, despertar a “curiosidade” pela Matemática em seus aspectos menos comuns. Então...

22.1 Multiplicação por ONZE

A multiplicação por onze, de números com dois algarismos, tem uma particularidade que pode ser utilizada. Ou seja, qualquer número entre 10 e 99, seque a regra, em exemplos:

$32 \times 11 = ?$	A pergunta: quanto seria trinta e dois vezes onze?
3 e 2	3 e 2 são os algarismos do número que está sendo multiplicado por onze.
(32)*: $3 + 2 = 5$	A soma dos seus algarismos seria cinco. *
$32 \times 11 = \_\ \_\ 2$	Todo resultado termina com o algarismo da direita. Neste caso: 2.
$3 \times 10 + 5 = 35$	Multiplica-se algarismo da esquerda por dez e soma-se com a soma dos algarismos determinada. *
$32 \times 11 = \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 5\ }\ 2$	Resultado: 352

$54 \times 11 = ?$	$89 \times 11 = ?$
(54)*: $5 + 4 = 9$ $5 \times 10 + 9 = 59$	(89)*: $8 + 9 = 17$ $8 \times 10 + 17 = 97$
$54 \times 11 = 594$	$89 \times 11 = 979$

22.2 Duas trincas iguais – × 7, × 11, × 13

Qualquer trinca de algarismo que compõe um número pode ser duplicado, em sequência, se ele for multiplicado por sete, onze e treze (em qualquer ordem), ou, logicamente, multiplicado por 1001 (que é a justificativa para o resultado esperado):

564 × 7 = 3948 3948 × 11 = 43428 43428 × 13 = **564564**	**453** × 1001 = 453 × (1000 + 1) = 453 × 1000 + 453 × 1 = 453000 + 453 = **453453**

O inverso também acontece (operação inversa):

564564 / 13 = 43428 43428 / 11 = 3948 3948 / 7 = **564**	**453453** / 1001 = (453000 + 453) / (1000 + 1)=**453**

22.3 Raiz quadradas exata (raízes inteiras)

Quando um número possuir uma raiz quadrada exata e este é um número inteiro, podemos facilitar, a sua determinação, com "lógica". Assim, por exemplo: se a raiz quadrada de 289 tem uma raiz inteira, o quadrado dele deve terminar em "9"; e, dentro do universo de "quadrados", ele deve estar entre 10^2 (100) e 20^2 (400), ou seja, deve começar com "1".

Como, os "quadrados" que terminam em "9", são: o 3^2 (9) e o 7^2 (49), a pergunta seria: Qual satisfaz essa exigência, ou seja, $\sqrt{289}$ seria ± 13 ou ± 17? Se $(\pm 13)^2$ é 169, então: $\sqrt{289} = \pm 17$.

O quadro a seguir pode ajudar. Note que, números que terminam em "3" ou "7" não possuem raízes exatas.

$10^2 =$	100	$1^2 =$	1	---------------------------	1					
$20^2 =$	400	$2^2 =$	4	---------------------------	-	4				
$30^2 =$	900	$3^2 =$	9	---------------------------	-	-	-	-	9	
$40^2 =$	1600	$4^2 =$	16	---------------------------	-	-	-	6		
$50^2 =$	2500	$5^2 =$	25	------ termina em ------	-	-	5			
$60^2 =$	3600	$6^2 =$	36	---------------------------	-	-	-	6		
⋮	⋮	$7^2 =$	49	---------------------------	-	-	-	-	9	
		$8^2 =$	64	---------------------------	-	4				
		$9^2 =$	81	---------------------------	1					

22.4 Algoritmo para determinar a raiz quadrada exata

Na página 34, o valor aproximado da raiz quadrada pode ser utilizado na maioria das aplicações, ou avaliações rápidas. Contudo, quando o erro associado, nesta primeira aproximação, não pode ser negligenciado, pode-se partir para uma nova expansão (recorrência de mais termos). Assim, segue uma matriz para o algoritmo de busca sucessiva de algarismos significativos para a determinação da raiz quadrada:

$$\sqrt{\cdots\_\,\_\,|\,\_\,\_\,|\,\_\,\_,\_\,|\,\_\cdots} = \underline{[a_1]}\ \underline{[a_2]}\ \underline{[a_3]}\cdots[a_{n+1}]$$

$[\quad\ ]$	a_1	**a_1:**
$\underline{-\,a_1^2}$	$2 \times a_1 = b_1$	$1 = \sqrt{1}$
$[\ r_1\ ][\quad\ ]$	$[b_1][a_2] \times a_2 \le r_1$	$2 = \sqrt{4}$
$\underline{-\,[b_1][a_2]}$	$2 \times [a_1][a_2] = b_2$	$3 = \sqrt{9}$
$[\ r_2\ ][\quad\ ]$	$[b_2][a_3] \times a_3 \le r_2$	$4 = \sqrt{16}$
$\underline{-\,[b_2][a_3]}$	$\vdots$	$5 = \sqrt{25}$
$\vdots$	$2 \times [a_1][a_2]\cdots[a_n] = b_n$	$6 = \sqrt{36}$
$r_n = 0$	$[b_n][a_n+_1] \times a_n+_1 = r_n$	$7 = \sqrt{49}$
		$8 = \sqrt{64}$
		$9 = \sqrt{81}$

Exemplo, $\sqrt{10}$:

$\sqrt{10} = \mathit{3}$ $\underline{-\ 9}$ 1 Resto: 1	A raiz quadrada da dupla de algarismos, mais a esquerda, é mais próximo da raiz quadrada de nove → primeiro algarismo da solução.
$\sqrt{10} = 3\mathbf{,}$ 1	Chega-se no ponto decimal do radicando → insere-se o ponto decimal na solução
$\sqrt{10} = 3\mathbf{,}$ $\underline{100}$	Utilização da próxima dupla de algarismos para compor a interação: 10,[00]
$\sqrt{10} = 3,$ 100 $\mathbf{2} \times 3 = \mathit{6}$	Algarismos (da solução) para a formação da interação: [*6*]
$\sqrt{10} = 3,$ 100 $6[\mathit{1}] \times \mathit{1} \le 100$	Algarismo da solução determinado: [*1*].

$\underline{-\ 61}$

39 Resto: 39

$\sqrt{10} = 3{,}1$

39

$\sqrt{10} = 3{,}1$ Utilização da próxima dupla de algarismos para compor a interação: 10,00[00]

3900

$\sqrt{10} = \mathit{3{,}1}$ Algarismos (da solução) para a formação da interação: [*31*].

3900 $\mathbf{2} \times \mathit{31} = 62$

$\sqrt{10} = 3{,}1$

3900 $62[\mathit{6}] \times \mathit{6} \leq 3900$ Algarismo da solução determinado: [*6*].

$\underline{-\ 3756}$

144 Resto: 144

$\sqrt{10} = 3{,}1\mathit{6}$

144

$\sqrt{10} = 3{,}16$ Utilização da próxima dupla de algarismos para compor a interação: 10,0000[00]

14400

$\sqrt{10} = \mathit{3{,}16}$ Algarismos (da solução) para a formação da próxima interação: [*316*].

14400 $\mathbf{2} \times \mathit{316} = 632$

$\sqrt{10} = 3{,}16$

14400 $632[\mathit{2}] \times \mathit{2} \leq 14400$ Algarismo da solução determinado: [*2*].

$\underline{-\ 12640}$

1756 Resto: 1756

$\sqrt{10} = 3{,}162...$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

Mais um exemplo, $\sqrt{221{,}201}$:

$\sqrt{2 \mid 21{,}20 \mid 1}$ $\underline{-\ 1}$ 1	= *1* Resto: 1	A raiz quadrada da dupla de algarismos, mais a esquerda [02], é mais próximo da raiz quadrada de um → primeiro algarismo da solução.
$\sqrt{2 \mid 21{,}20 \mid 1}$ 121	= 1	Utilização da próxima dupla de algarismos para compor a interação.
$\sqrt{2 \mid 21{,}20 \mid 1}$ 121	= *1* **2** × *1* = 2	Algarismos (da solução) para a formação da interação: [*2*].
$\sqrt{2 \mid 21{,}20 \mid 1}$ 121 $\underline{-96}$ 25	= 14 $2[4] \times 4 \leq 121$ Resto: 25	Algarismo da solução determinado: [*4*].
$\sqrt{2 \mid 21{,}20 \mid 1}$ 25	= 14,	Chega-se no ponto decimal do radicando → insere-se o ponto decimal na solução
$\sqrt{2 \mid 21{,}20 \mid 1}$ 2520	= 14,	Utilização da próxima dupla de algarismos para compor a interação
$\sqrt{2 \mid 21{,}20 \mid 1}$ 2520	= 14, **2** × 14 = *28*	Algarismos (da solução) para a formação da interação: [*28*]
$\sqrt{2 \mid 21{,}20 \mid 1}$ 2520 $\underline{-2304}$ 216	= 14, $28[8] \times 8 \leq 2520$ Resto: 216	Algarismo da solução determinado: [*8*].
$\sqrt{2 \mid 21{,}20 \mid 1}$ 21610	= 14,8	Utilização da próxima dupla de algarismos para compor a interação
$\sqrt{2 \mid 21{,}20 \mid 1}$ 21610	= *14,8* **2** × *148* = 298	Algarismos (da solução) para a formação da próxima interação: [*148*].

$\sqrt{2 \mid 21{,}20 \mid 1}$	=	*14,8*	
21610		$298[7] \times 7 \leq 21610$	Algarismo da solução determinado: [*7*].
$\underline{-20909}$			
$\underline{701}$		Resto: 701	
$\sqrt{2 \mid 21{,}20 \mid 1}$	=	*14,87*...	
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

23 MÍNIMO ESFORÇO

Muitas vezes, a “conta” fica mais “atraente” quando podemos transformar em “contas” mais “fáceis” (pessoalidade). Claramente, não exime o aprendiz, o estudante, ou aquele que quer se “desenvolver”, evoluir, de não praticar ou saber realizar “contas” menos confortáveis. Para ilustrar, podemos exemplificar:

$$
\begin{gathered}
76 \times 8 = \\
(70 + 6) \times 8 = \\
70 \times 8 + 6 \times 8 = \\
560 + 48 = \\
608
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
76 \times 8 = \\
(76) \times (10 - 2) = \\
(76 \times 10) - (76 \times 2) = \\
760 - 152 = \\
(700 - 100) + (60 - 52) = \\
600 + 8 =
\end{gathered}
$$

Qual o caminho mais “fácil”?
Ou, qual caminho tem menos risco de errar?
Ou, qual caminho se tem mais certeza do que se está fazendo?

“Tabuada do” oito e operações de soma?	“Tabuada do dois” e operações de soma e subtração?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Finalizo com a equivalência do significado de LOVE, amor, ♥, 愛, colocada no Prefácio deste trabalho. Assim, as expressões dos sentimentos, ou dos números, podem variar. Mas, os que carregam seus verdadeiros significados, e valores, levam à exatidão (matemática) de ações, levam a um mesmo resultado, que podem, ainda, ser avaliados pelos restos deixados (Prova dos RESTOS, p.29).

9 786590 181718